TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

NOTA.

1° *Le symbole* Log x *désigne le logarithme népérien de* x.

2° *Les candidats sont priés d'apporter toute leur attention à l'exactitude des résultats de la première question, qui conditionne tout le reste du problème.*

3° *Les questions* 9° *à* 13° *peuvent être résolues par un candidat n'ayant au préalable traité que le* 1°.

Tournez la page S. V. P.

Soit $\mathcal{D} =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$. x désignant un élément de $\mathcal{D}$, et a, b, c trois réels fixes, on pose :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - ax - b - \frac{c}{x}.$$

1° Déterminer a, b, c de façon que, lorsque $|x| \to +\infty$, on ait l'équivalence :

$$f(x) \sim \frac{k}{x^2},$$

k désignant un réel fixe non nul.

On constatera que ce problème admet une solution unique. Quelle est alors la valeur de k ?

Dans toute la suite du problème, a, b, c ont les valeurs numériques trouvées ci-dessus.

2° x désignant un élément de $\mathcal{D}$, différent de 1, calculer $f'(x)$.

3° *On suppose dans cette question* $x \geqslant 1$.

Montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $P(x)$, P étant un certain polynôme, de degré 5, que l'on explicitera. On utilisera le fait que si $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, le signe de $(A - B)$ est celui de $(A^2 - B^2)$.

Déterminer, pour $x \geqslant 1$, le signe de $P(x)$: on devra pour cela grouper convenablement les termes de ce polynôme.

En déduire le signe de $f'(x)$ puis le tableau de variation de $f(x)$ lorsque x décrit $[1, +\infty[$.

Étudier enfin $\lim_{x \to 1_+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

4° *On suppose dans cette question* $x < -1$.

Quel est le signe de $f'(x)$ si $-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant x < -1$?

. . . /.

E.N.S.A.E. 1980 - 192 - III

On suppose maintenant que $x < -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: montrer que le signe de $f'(x)$ est encore celui de P (x) (P désignant le polynôme introduit à la question précédente).

Calculer P'(x) et P''(x); étudier le signe de P''(x) lorsque $x < -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et en déduire les variations, puis le signe de P' (x). En déduire enfin le signe de P(x), puis celui de $f'(x)$.

Donner le tableau de variation de $f(x)$ lorsque x décrit $]-\infty, -1[$.

5° Calculer $f''(x)$ en supposant $x \neq 1$.

6° *On suppose dans cette question* $x > 1$.

Que' est le signe de $f''(x)$ si $1 < x \leqslant 2$?

On suppose maintenant que $x > 2$. Montrer que le signe de $f''(x)$ est celui de $Q(x)$, Q étant un certain polynôme de degré 7, que l'on explicitera.

Déterminer, en supposant $x \geqslant 2$, le signe de Q (x) : on utilisera pour cela un groupement convenable des termes de ce polynôme.

En déduire le signe de $f''(x)$ si $x > 1$.

7° *On suppose dans cette question* $x < -1$.

Montrer que le signe de $f''(x)$ est alors celui de $Q_1(x) = -Q(x)$, où Q désigne le polynôme introduit à la question précédente.

Déterminer le signe de $Q_1(x)$ en supposant $x \leqslant -1$. En déduire le signe de $f''(x)$ si $x < -1$.

8° Donner l'allure générale du graphe (C) de f en précisant le sens de concavité et la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

9° On pose :

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \; ; \qquad J = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx.$$

Justifier l'existence de ces deux intégrales.

Déterminer le signe de I et celui de J.

Tournez la page S. V. P.

10° Effectuer sur I et sur J le changement de variable défini par :

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Vérifier que, *après simplification*,

$$I = \int_0^1 g(t)\,dt \; , \qquad J = \int_1^{+\infty} g(t)\,dt$$

où g désigne une fraction rationnelle de dénominateur $(t+1)^3(t^2+1)$.

Expliciter complètement $g(t)$.

La simplification intervenue était-elle prévisible?

11° Décomposer g sur R en éléments simples. Calculer une primitive, G, de g.

12° Calculer des expressions simples de I et J, faisant intervenir Log 2.

Vérifier que les signes I et de J sont ceux prévus à la question 9°.

13° Calculer les valeurs décimales approchées à 10^{-6} près par défaut de $|I|$ et de $|J|$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail